
正交截線

§

August 12, 2021

在看這篇之前最好是要先知道一些完全四線形的性質，配極變換，交比，要是會錐線的話當然就更好，在最一開始我先給出它的定義。

Definition 0.1. 給定三角形 $\triangle ABC$ 和一點 P 做過 P 垂直 PA 的直線交 BC 於 D 。類似定義 E, F 則 D, E, F 共線，並稱該直線為 P 對 $\triangle ABC$ 的正交截線 (Orthotransversal)，文中將用 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 表示，至於剛剛那裏的 D, E, F 為甚麼會共線底下我會用不同的觀點給出幾個證明。

1 完全四線形

完全四線形版本的證明：設 EF 交 BC 於 D' ，那其實我們就是要證明 PD' 垂直 PA 。考慮完全四線形 $\triangle ABC \cup EF$ ，注意到完全四線形的性質三個直徑圓共軸，這樣一來 PD' 垂直 PA 就顯然成立了。 \square

透過這個證明我們可以馬上得到一個性質

Proposition 1.1. 考慮 $\triangle ABC$ 截 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 形成的完全四線形，則 PH 為垂心線，其中 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

Proposition 1.2. 若 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圓上， $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 過 $\triangle ABC$ 外心。

Proof. 設 B, C 關於外接圓的對徑點為 B', C' ，對 $(C'PB'BAC)$ 用帕斯卡定理，得到

$$(C'P \cap BA), (PB' \cap AC), (B'B \cap C'C) \text{ 三點共線}$$

即 EF 過 $\triangle ABC$ 外心。 \square

其實上面這個可以推廣

Proposition 1.3. 假設一點 P 對 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形為 A', B', C' ， Q 是外接圓上一點，設 QA' 交 BC 於 D ，同理定義 E, F ，則 D, E, F 共線且過 P 。

Proof. 對 $(C'PB'BAC)$ 用帕斯卡定理，則 EF 過 P 所以證畢。 \square

Proposition 1.4. 若 P 在 $\triangle ABC$ 的外接圓上， $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 交三邊於 D, E, F ，且 $(AD)(BE)(CF)$ 共軸在 P, X ，則 X 在 $\triangle ABC$ 的九點圓上。可以開封藤二號或是算冪所以這裡就不證了。

2 配極

配極版本的證明：設 D 在 BC 上滿足 PA 垂直 PD ，類似定義 E, F ，我們選一個以 P 為圓心的圓配極，考慮 A, B, C 的極線，則由 PA 垂直 PD ，得到 D 的極線平行 PA 且 D 的極線過 BC 的極點，所以 D 配極完後就會變成 A, B, C 的極線所形成的三角形的高，三個高顯然會共點，故 D, E, F 共線。 \square

這證明可以得到一個滿強的結論。

Corollary 2.1. 設以 P 為圓心的配極變換 $p_{(P)}$ 把 Δ 變換成 $p_{(P)}(\Delta')$ ， Δ 的垂心為 H_Δ ，則

$$p_P(H_\Delta) = O_P(\Delta')$$

Proposition 2.1. 給定三角形 ΔABC ，設 P, Q 為等角共軛點對， Q_A, Q_B, Q_C 是 Q 對 ΔABC 的佩多三角形， H 是 $Q_A Q_B Q_C$ 的垂心，則 $O_P(\Delta ABC)$ 垂直 QH 。

Proof. 我們選一個以 P 為圓心的圓對 ΔABC 和 $O_P(\Delta ABC)$ 配極，假設 ΔABC 配極後為 $B'C', C'A', A'B'$ 則由上個性質 $O_P(\Delta ABC)$ 被變換至 $A'B'C'$ 的垂心，假設他叫 H' ，且我們由等角共軛點的性質， AP 垂直 $Q_B Q_C$ ，又由配極變換知道， AP 垂直 $B'C'$ 故 $A'B'C'$ 和 $Q_A Q_B Q_C$ 相似，且 Q, P 分別為 $Q_A Q_B Q_C, A'B'C'$ 和 ΔABC 的正交中心，故 P, Q 也是位似的，所以 $PH' \parallel QH$ ，又 $PH' \perp O_P(\Delta ABC)$ ，所以原命題得證。 \square

Proposition 2.2. 給定五點 $PABCD$ ，則 $O_P(\Delta ABC), O_P(\Delta ABD), O_P(\Delta ACD), O_P(\Delta BCD)$ 共點。

Proof. 和剛剛這個證明一樣配極，這次我們要證明的是四個配極後的垂心共線，不過我們熟知完全四線形的四個垂心共線，故命題證畢。 \square

Proposition 2.3. 給定兩個透視的三角形 ABC, DEF 和透視中心 P ，設 $O_P(\Delta ABC)$ 對 ΔABC 的三線性極點為 $Q, O_P(\Delta DEF)$ 對 DEF 的三線性極點為 R ，則 P, Q, R 共線。

Proof. 和剛剛這個證明一樣配極，注意到 Q 配極後會變成 $O_P(\Delta ABC)$ 的極點對 A, B, C 的極線所形成的三角形的三線性極線，所以現在我們要證明的是兩個三線性極線平行，不過有趣的是兩個透視三角形配極後會位似，所以兩個位似三角形的垂心的三線性極線就顯然平行了，配極回來就是 P, Q, R 共線。 \square

接下來要進入有錐線 (有趣) 的部分了，有感到身體不適者可以先跳過這個章節。

3 錐線上的推廣

Proposition 3.1. 給定等軸雙曲線上五點 $PQABC$ ，做過 P 垂直 AQ 的線交 BC 於 D 同理定義 E, F 則， D, E, F 共線且垂直 PQ 。

Proof. 設 BQ 交 PF 於 I , CQ 交 PE 於 J , 考慮 $\triangle CQB$ 的垂心 H , 注意到等軸雙曲線的垂心性質和 $BH \parallel PI, CH \parallel PJ$, 因此我們可以得到

$$(F, P; I, \infty) = B(A, P; Q, H) = C(A, P; Q, H) = (E, P; J, \infty)$$

所以我們有 $EF \parallel IJ$, 但是因為 $IJPQ$ 為垂心組, 所以有 $IJ \perp PQ$, 所以 $EF \perp PQ$, 同理可得 $DF, DF \perp PQ$, 故 D, E, F 共線且垂直 PQ 。 \square

然後我們可以立即得到一個性質

Corollary 3.1. $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 垂直 P 在 $(ABCP)$ 等軸雙曲線上的切線。

Corollary 3.2. $\mathcal{O}_G(\triangle ABC) \perp GK$

Corollary 3.3. $\mathcal{O}_I(\triangle ABC) \perp OI$

這時候我們可以用一個很通靈的方式做出這題。

Problem 3.1. 三角形 $\triangle ABC$, O, I 是外心和內心, 令切點三角形為 DEF , D 對 EF 鏡射為 D' , 證明 AD', OI, BC 共點。

Proof. 考慮 IB, IC 上的兩點 U, V 滿足 $AU \perp AC, AV \perp AB$ 則發現到 $UV = \mathcal{O}_A(\triangle BIC)$, 因此 A 在 $(ABCIH)$ 上的切線垂直 UV , 注意到我們同時得到 AEF 和 IUV 正交, 考慮 D 關於 EF 中點的對稱點為 D'' , 則 AD', AD'' 為等角線, 由 AEF 和 IUV 正交我們知道 AD'' 垂直 UV , 因此我們知道 AD'' 是 A 在 $(ABCIH)$ 上的切線, 故 AD' 過 BC 和 OI 的交點。 \square

然後下面這個東西配合一點小性質可以秒掉某次模競的一題

Proposition 3.2. 設 P 在 $\triangle ABC$ 外接圓上, H 為垂心, 過 A 做平行 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 的線交外接圓於 E , HP 交外接圓於 F , 則 EF 平行 BC 。

Proof. 假設過 A 平行 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 的線交錐線 $(ABCPH)$ 於 T , 考慮 ATP 的垂心, 由等軸雙曲線知道 ATP 的垂心在過 P 垂直 AT 的直線上, 但由上個性質可得, ATP 為直角三角形, 考慮 A 的對徑點 A' , 即知 PT 過 A' , 所以我們就可打個交比,

$$A(B, C; A', F) = P(B, C; A', F) = P(B, C; T, H) = A(B, C; E, H)$$

故 AE, AF 為等角線, 即 EF 平行 BC 。 \square

Problem 3.2. 設三角形 $\triangle ABC$, O, H 為外心和垂心, EF 在外接圓上滿足 $BC \parallel EF$, D 為 EH 中點, 過 O 平行 AF 的直線交 AB 於 G 。

證明:

$$DG \perp DC$$

其實我們可得到一些之後可能會用到的小性質。

Proposition 3.3. 三角形 $\triangle ABC$, P 在外接圓上, 過 P 做垂直 AP, BP, CP 的直線交 $(ABCHP)$ 於 P_A, P_B, P_C 則 $AP_A, BP_B, CP_C, \mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 平行。

Proof. 直接考慮 APP_A 的垂心，因為 $(ABCHP)$ 是等軸雙曲線，所以 AP_A 和 P 點的切線垂直，所以平行 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 。 \square

接下來這個等軸雙曲線的性質可以推出一個讓我們算角的東西。

Proposition 3.4. 設 P, Q 對等軸雙曲線上的極線為 T_P, T_Q ， O 為錐線中心，則

$$\angle(T_P, T_Q) = \angle QOP$$

Proof. 設 M, N 為該等軸雙曲線上兩個垂直方向的無窮遠點，對任一點 P ，打交比在無窮遠線上知 $(OP, T_P; OM, ON) = -1$ ，又 OM, ON 垂直，由調和性質知， OM 是 OP, T_P 方向的角平分線， T_P 方向根本就是將 OP 方向對其中一條漸進線做對稱，故自然就有 $\angle(T_P, T_Q) = \angle QOP$ 了 (做了對稱故方向會反過來)。 \square

注意到若 P 在錐線上則 T_P 其實就是在該錐線在 P 的切線，於是就有等軸雙曲線上的切線是可算角的了!

Proposition 3.5. 設 P 在等軸雙曲線上的切線為 T_P ， O 為錐線中心， P' 為 P 對 O 的對徑點， X 為錐線上任意一點，則 $\angle(T_P, PX) = \angle XP'P$ 。

錐線算角是有妙用的看看下面這個性質。

Proposition 3.6. 三角形 $\triangle ABC$ ， A' 是 A 在外接圓上的對徑點，則

$$(AB, AC; AA', \mathcal{O}_{A'}(\triangle ABC)) = -1$$

Proof. 假設過 A 平行 $\mathcal{O}'_A(\triangle ABC)$ 的直線和 $(ABCHA')$ 的交點為 T ，則我們等價要證 $H(B, C; A', T) = -1$ ，不過我們有 HA' 過 BC 中點，所以等於要證 HT 平行 BC 也就是要證 $ATA'H$ 共圓，假設 AT 交外接圓於 E ，注意到 EA' 是切線，而且 H 是 A' 在錐線上的對徑點 (由九點錐線顯然)，所以

$$\angle ATA' = \angle EA'A = \angle(EA', A'A) = \angle AHA'$$

故 $ATA'H$ 共圓，證畢。 \square

4 對合與正交截線

我們都知道外接圓上一點 X 的正交截線會是 O -置換線，但這樣似乎有點狹隘，因此我們給了他一個也許會有用的推廣，我們先用另一個觀點來看平常的正交截線。

Proposition 4.1. 設 X 為任意點，設 $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{H, X}$ ，假設垂直 X 關於 \mathcal{D} 的切線方向的無窮遠點為 $\infty_{\mathcal{D}_X}^\perp$ ，則 X 關於 $\triangle ABC$ 的正交截線 $\mathcal{O}_X = \mathfrak{S}_{\infty_{\mathcal{D}_X}^\perp}^{\mathcal{D}}(X)$ ，特別的我們有 \mathcal{O}_X 垂直 X 在 \mathcal{D} 上的切線。

Proof. This is Trivial. \square

Proposition 4.2. 設 X 為任意點， \mathcal{D} 為過 A, B, C, X 的任意外接錐線，則存在一點 P 使得， $\mathcal{O}_X = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{D}}(X)$ ，並且我們有 X 在 \mathcal{D} 上的切線垂直 PX 。

Proof. 考慮一個變換 $f: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, 使得 $Xf(Y) \perp XY$, 則這顯然是一個射影對合變換, 故存在一對合中心 P 滿足對所有 Y 都有 $P, Y, f(Y)$ 共線, 特別的取 $Y = A, B, C$ 可以注意到 $\mathfrak{S}_P^{\mathcal{D}}(X) = \mathcal{O}_X$, 且因為 P 為對合中心, 故 $PX \perp XX$, 即 X 在 \mathcal{D} 上的切線垂直 PX 。 \square

Proposition 4.3. 設 X 為任意點, 則對於任何一點 $P \in \mathcal{O}_X$, 存在一個過 A, B, C, X 的外接圓錐曲線 \mathcal{D} 使得 $\mathcal{O}_X = \mathfrak{S}_P^{\mathcal{D}}(X)$ 。

Proof. 設 AP 和過 X 垂直 AX 的直線交於點 P_A , 考慮錐線 $\mathcal{D} = (ABCXP_A)$, 則由 (4.2), 存在一點 P' 使得 $\mathcal{O}_X = \mathfrak{S}_{P'}^{\mathcal{D}}(X)$, 但這表示 $P' \in \mathcal{O}_X \cap AP_A$, 即 $P = P'$ 。 \square

Proposition 4.4. 對於 $\triangle ABC$ 外接圓 Ω 上的點 X , 設等共軛 φ 滿足 $\varphi(X) \in \mathcal{L}_\infty$, 則 $\mathcal{O}_X = \mathfrak{S}_{\varphi(H)}^{\mathcal{L}_\infty}(X)$, 特別的我們有 $\varphi(H) \in \mathcal{O}_X$ 。

Proof. 考慮張志煥截線基本定理則我們有

$$\mathfrak{S}_{\varphi(H)}^{\mathcal{L}_\infty}(X) = \mathfrak{S}_{H^*}^{\mathcal{L}_\infty}(X) = \mathfrak{S}_O(X) = \mathcal{O}_X$$

\square

那我們也可以用對合給出一個 (3.1) 的證明。

Proposition 4.5. 給定等軸雙曲線上五點 $PQABC$, 做過 P 垂直 AQ 的線交 BC 於 D 同理定義 E, F 則 D, E, F 共線且垂直 PQ 。

Proof. 考慮錐線 $\mathcal{C} = (ABCPQH)$, 以及垂直 PQ 方向的無窮遠點 ∞_{PQ}^\perp , 則

$$\mathfrak{S}_{\infty_{PQ}^\perp}^{\mathcal{C}}(P) = DEF$$

\square

5 一些綜合性質和應用

Proposition 5.1. 給定三角形 $\triangle ABC$, 設 P 在 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 上的垂足為 Q , 則 $\triangle APQ, \triangle BPQ, \triangle CPQ$ 垂心共線。

Proof. 設 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 為 L , 考慮以 P 為圓心 PQ 為半徑的圓, 假設 A, B, C 對他配極變成 L_A, L_B, L_C , P 配極後變成無窮遠線 L_∞ , 所以我們等價要證明

$$\mathcal{O}_P(\triangle L_A L L_\infty), \mathcal{O}_P(\triangle L_B L L_\infty), \mathcal{O}_P(\triangle L_C L L_\infty) \text{ 三線共點}$$

假設 PQ 交 L_A, L_B, L_C 於 A', B', C' , PA, PB, PC 交 L 於 P_A, P_B, P_C , 注意到因為 PA' 垂直 L , PP_A 垂直 L_A , 所以 $P_A A' = \mathcal{O}_P(\triangle L_A L L_\infty)$, 所以現在只需要證明 $P_A A', P_B B', P_C C'$ 共點也就是要證明

$$P(P_A, P_B; P_C, Q) = (A', B'; C', Q)$$

假設 L_A, L_B, L_C 圍出的三角形為 $\triangle XYZ$ ，則我們有 $XQ \perp L_A$ ，而注意到 PP_A 也垂直 L_A ，所以

$$P(P_A, P_B; P_C, Q) = Q(X, Y; Z, P)$$

設 $QX \cap YZ = T$ ，則

$$Q(X, Y; Z, P) = (T, Y; Z, A') = (A', Z; Y, T) = X(A', B'; C', Q)$$

這就證明了 L_A, L_B, L_C 共點，配極回來就是垂心共線。 \square

Proposition 5.2. 設 P 對 $\triangle ABC$ 的反希瓦三角形為 $\triangle DEF$ ， P 對 $\triangle ABC$ 的佩多三角形為 $\triangle XYZ$ 則， P 對 $\odot(XYZ)$ 的極線是 $\mathcal{O}_P(\triangle DEF)$ 。

Proof. 設過 P 垂直 PD 的線交 EF, AC, AB 於 T, M, N ，我們要證明的就是 T 在 P 對 (XYZ) 的極線上，首先有 $YZMN, AYZP$ 分別四點共圓，且 PT 和 $(AYZP)$ 相切。設 YZ 交 MN 於 J ，則我們可以得到

$$JM \times JN = JY \times JZ = JP^2$$

再加上完全四線形的調和性質，

$$A(B, C; P, E) = (N, M; P, T)$$

故 J 為 \overline{PT} 中點，故 PT 直徑圓和 $\odot(XYZ)$ 正交，即 $T \in \mathfrak{p}_{\odot(XYZ)}(P)$ \square

上面這個看起來沒用的東東可以證出下面這兩個很強的結論。

Proposition 5.3. 設 $\triangle DEF$ 是 P 對 $\triangle ABC$ 的西瓦三角形， Q 是 P 對 $\triangle DEF$ 的等角共軛點，則 PQ 和過 $ABCP$ 的等軸雙曲線相切。

Proof. 考慮 P 對 $\triangle DEF$ 的佩多圓，注意到 PQ 過佩多圓的圓心，故 P 對佩多圓的極線會垂直 PQ 但是我們由 (5.2) 知道那條極線就是 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ ，也就是說 PQ 垂直 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ ，但是我們又知道 P 在錐線上的切線垂直 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ ，故 PQ 就是切線。 \square

Proposition 5.4. 給定三角形 $\triangle ABC$ 和一點 P ，則 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ ， P 對 $\triangle ABC$ 的三線性極線， P 對 P 對 $\triangle ABC$ 的配多圓的極線共點。

Proof. 我們先把極線換掉，設 P 對 $\triangle ABC$ 的反希瓦三角形為 $\triangle DEF$ ，注意到 P 對 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 的三線性極線重合，則變成要證明 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC), \mathcal{O}_P(\triangle DEF), P$ 對 $\triangle DEF$ 的三線性極線共點。設 AC, DF 交於 T_B ， AB, DE 交於 T_C ， $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 交 AB, AC 於 O_C, O_B ， $\mathcal{O}_P(\triangle DEF)$ 交 DF, DE 於 O_E, O_F ，變成要證明 $T_B T_C, O_B O_C, O_E O_F$ 共點，不過 $T_B O_B, T_C O_C$ 交於 A ， $T_B O_E, T_C O_F$ 交於 D ， $O_B O_E, O_C O_F$ 交於 P ，所以由迪沙格定理證畢。 \square

Corollary 5.1. I 的三線性極線平行 $\mathcal{O}_I(\triangle ABC)$

Corollary 5.2. I 的三線性極線垂直 OI 。

Proposition 5.5. 給定三角形 $\triangle ABC$ 和外接圓上一點 P ，則 P 對 $\triangle ABC$ 的三線性極線， $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ ， P 對 $\triangle ABC$ 的斯坦那線共點在 Jerabek 雙曲線上。

Proof. 共點由上個性質可以立即推論，所以我們只要證， $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ ， P 對 $\triangle ABC$ 的斯坦那線共點在 Jerabek 雙曲線上，假設這個點叫 X ，我們等於要證 $(ABCOHX)$ 共錐線，很自然地會想要對 $(AHXOCB)$ 開帕斯卡，假設 AH 交 OC 於 T ， HX 交 BC 於 S ， XO 交 AB 於 U ， C 的對徑點為 C' ，且 AH 交外接圓於 D ，要證明的是 T, S, U 共線，考慮對外接圓上六點 $(BADPC'C)$ 用帕斯卡，則 BA 交 PC' 於 U ， AD 交 $C'C$ 於 T ， DP 交 BC 於 S ，所以 T, S, U 共線，由帕斯卡定理 $(AHXOCB)$ 共錐線。 \square

眼尖的朋友可以發現到當 P 在外接圓上跑的時候 X 會和 P 保交比喔，所以這其實根本就可以用大保交比來證，而且這可以再推廣。

Proposition 5.6. 設 P, Q 對 $\triangle ABC$ 的圓西瓦三角形為 $\triangle P_A P_B P_C$ ， $\triangle Q_A Q_B Q_C$ ， X 在外接圓上，令 XP_A 交 BC 於 X'_A 同理有 X'_B, X'_C ，由性質 3 我們知道 X'_A, X'_B, X'_C 共線，假設他叫 $\mathfrak{S}_P(X)$ ，同理定義 $\mathfrak{S}_Q(X)$ ，若 $\mathfrak{S}_P(X), \mathfrak{S}_Q(P)$ 共點在 Z ，則 $(ABCPQZ)$ 共錐線。證明一樣用帕斯卡所以毒者可以自己動手做

你還可以再推論一件事

Proposition 5.7. 和上面標號一樣，設 XZ 交外接圓於 T ，則 T 為 $(ABCPQZ)$ 和外接圓的第四個交點。證明可以用大堡礁比所以這裡也留給毒者。

這裡提供一個等等會用到的性質。

Proposition 5.8. 給定五點 A, B, C, D, E ，則 E 對 $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$ 的佩多圓共點。

Proof. 設 E 在 AB, BC, CD, DA, AC, BD 的垂足為 P, Q, R, S, U, V 設 E 對 $\triangle ABD, \triangle ABC$ 的佩多圓交於 T ，則我們要證明的是 $\angle(TV, TQ) = \angle(RV, RQ)$ 由算角度我們有

$$\begin{aligned} \angle(TV, TQ) &= \angle(TV, TP) + \angle(TP, TQ) = \angle(SV, SP) + \angle(UP, UQ) \\ &= \angle(SV, SE) + \angle(SE, SP) + \angle(UP, UE) + \angle(UE, UQ) \\ &= \angle(RV, RE) + \angle(SE, SP) + \angle(UP, UE) + \angle(RE, RQ) \\ &= \angle(RV, RE) + \angle(RE, RQ) + \angle(SE, SP) + \angle(UP, UE) = \angle(RV, RQ) \end{aligned}$$

\square

然後下面這個太毒了我不會證。

Proposition 5.9. 給定五點 $ABCDE$ ，定義 E_1 為 $\mathcal{O}_E(\triangle ABC), \mathcal{O}_E(\triangle ABD), \mathcal{O}_E(\triangle ACD), \mathcal{O}_E(\triangle BCD)$ 的交點，同理定義 A_1, B_1, C_1, D_1 ，然後假設 E 對 $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$ 的佩多圓共點在 E_2 ，類似定義 A_2, B_2, C_2, D_2 ，則 $ABCDE \sim A_1B_1C_1D_1E_1 \sim A_2B_2C_2D_2E_2$ ，且錐線 $(ABCDE)(A_1B_1C_1D_1E_1)(A_2B_2C_2D_2E_2)$ 的中心是同一個而且這個中心同時也是 $A_1B_1C_1D_1E_1 \sim A_2B_2C_2D_2E_2$ 的位似中心

6 正交共軛

我們先看某次公突在張修展別吃我 po 的題目

Problem 6.1. H 是 $\triangle ABC$ 的垂心， P 是平面上任一點，過 H 對 PA, PB, PC 做垂線依序交 BC, CA, AB 在 D, E, F ，證明 D, E, F 共線。

Proof. 設 p_H 為以 H 為中心，固定住 $\triangle ABC$ 的反演變換，則顯然

$$D, E, F \in p_H(P)$$

□

有了上面的性質後，下面這題就變得不堪一擊了!!

Problem 6.2. H 是 $\triangle ABC$ 的垂心， P 是 (ABC) 上任一點，令 M 為 HP 中點，在 BC 上做一點 D 使得 $DH \parallel AP$ ，類似定義 E, F 證明 D, E, F, M 共線。

Definition 6.1. 設 $p_H(P)$ 的三線性極點為 P° ，則我們定義 $P \mapsto P^\circ$ 的變換為正交共軛 (Orthogonal conjugate)。

下面這個主要是想說正交共軛是射影對合變換，然後標號 P° 沿用。

Proposition 6.1. 設 P 的正交共軛點是 P° ，則 P° 的正交共軛點是 P ，且 $P \mapsto P^\circ$ 是保交比對合變換。

Proof. 我們要證 P 的三線性極線是 $\mathcal{H}_{P^\circ}(\triangle ABC)$ ，設 AP, AP° 交 BC 於 U, V ， P, P° 的三線性極線交 BC 於 U', V' ， AH 交 BC 於 D ，不過

$$DA \times DH = DU \times DV' = DU' \times DV$$

即 $U'H \perp AV$ ，故 $(P^\circ)^\circ = P$ 。 □

Corollary 6.1. 以下都是可以立即得到的推論

- (1) 標號同上， $P^\circ H$ 垂直 P 的三線性極線。
- (2) G, H 互為正交共軛點。
- (3) 直線的正交共軛軌跡為三角形的外接錐線。
- (4) 歐拉線的正交共軛軌跡為三角形的 Kiepert 雙曲線。

Proposition 6.2. 設 P 在歐拉線上， Q 為 P 的等角共軛點，則 H, Q, P° 共線。

而由今年的一階可以得到下面這個推論。

Corollary 6.2. 外接圓上一點 P ， P 的補點在 $p_H(P)$ 上。

Proposition 6.3. 過 $\triangle ABC$ 重心 G 的直線與 $\triangle ABC$ 的外接等軸雙曲線交於 U, V , 則 HU 垂直於 V 的三線性極線, 其中 H 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

Proof. 考慮 U, V 的正交共軛點 U°, V° , 則由 A, B, C, H, U, V 共錐線, 我們知道 G, U°, V° 共線, 因此由迪沙格對合定理裡 $H = UV^\circ \cap VU^\circ$, 故 HU 垂直 V 的三線性極線。 \square

因此我們可以推論底下兩件事。

Corollary 6.3. H, I, Na° 共線。

Corollary 6.4. 三角形 $\triangle ABC$ 的奈格爾點 Na 的三線性極線垂直 HI 。

Proposition 6.4. K° 是 O 的等截共軛點。

Proof. 注意到 K 的三線性極線和 A 在外接圓上的切線交在 BC 上, 設此點為 X , 我們只須證明 XH 垂直 AO' 其中 O' 為 O 的等截共軛點, 設 D 是 A -垂足, 設 AO, AO' 交 BC 於 V, V' , 注意到 $DA^2 = DX \times DV$, 故

$$DA \times DH = DV' \times DX \implies \text{故 } H \text{ 是 } \triangle XAV' \text{ 的垂心} \implies XH \perp AO' \quad \square$$

Corollary 6.5. 設 H' 是 H 的等截共軛點, 則 H'°, H, K 共線。

Proof. 考慮 H, G, O 的等截共軛的正交共軛共線故得證 \square

Proposition 6.5. 設 X 為 Kiepert 雙曲線上一點, 則 X 的等截共軛點的三線性極線垂直 HX 。

Proof. 設 G, H 為 $\triangle ABC$ 的重心、垂心, X' 為 X 的等截共軛點, GX' 交 BC 於 X_A , 類似定義 X_B, X_C , 設 τ 為 X 的等截共軛點的三線性極線, 則

$$\begin{aligned} H(X, A; B, C) &= A(X, A; B, C) = (X', X_A; X_B, X_C) = (\ell, BC; CA, AB) \\ &\implies \ell \perp HX \end{aligned}$$

\square

Proposition 6.6. 若 P 在 $\triangle ABC$ 的 Kiepert 雙曲線上, τ 為 P 的三線性極線, 則 $Q = \{AB, BC, CA, \tau\}$ 的垂心線為 PH 。

Proof. 設 P 的等截共軛點為 P' , 則 P' 的三線性極線垂直 HP , 且注意到 τ 為 P' 的三線性極線的等截共軛線, 故 HP 垂直 Q 的牛頓線, 因此為垂心線。 \square

Corollary 6.6. 對於 $\triangle ABC$ 歐拉線上一點 P , $p_H(P)$ 關於 $\triangle ABC$ 的等截共軛線平行 P 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極線。

於是我們可以用上面這些東西來得到 TS 在幾何毒書會裡面丟的關於 Kiepert 雙曲線的一個性質。

Problem 6.3. 給定三角形 $\triangle ABC$ 與一垂直於 $\triangle ABC$ 尤拉線的直線 ℓ , 則 $Q\{BC, CA, AB, \ell\}$ 的垂心線過 ℓ 關於 $\triangle ABC$ 的三線性極點。

7 題目

Problem 7.1. 設三角形 $\triangle ABC$ ， O, H 為外心和垂心， S 為外接圓上一點，做 P 在 BC 邊上滿足 $\angle ASP = 90^\circ$ ， SH 交 AP 直徑圓於另一點 X ， OP 交 AC, AB 於 Q, R ， Q, R 在 AB, AC 邊上的垂足為 Y, Z 。
試證： X, Y, Z 共線。

Proof. 首先注意到 $OP = \mathcal{O}_S(\triangle ABC)$ ，故 $\angle BSQ = \angle CSR = 90^\circ$ ，並且由 HS 為 $\{BC, CA, AB, OP\}$ 的垂心線，我們有 X 在 $(AP), (BQ), (CR)$ 直徑圓上，故

$$\angle SXZ + \angle YXS = \angle SCA + \angle BYS = 0 \implies X, Y, Z \text{ 共線}$$

□

Problem 7.2. 設 I, O, H 為 $\triangle ABC$ 的內心、外心、垂心， $\triangle DEF$ 為 I 的西瓦三角形， X 是 $\triangle DEF$ 的垂心，則 $IX \parallel OH$

Proof. 設 $\triangle UVW$ 為 $\triangle ABC$ 的切點三角形， (I) 為 $\triangle ABC$ 內切圓，則

Claim 1. $\mathbf{p}_{(I)}(\triangle DEF)$ 為 $\triangle UVW$ 的反補三角形 $\triangle U'V'W'$ 。

proof of Claim 1. 注意到 A, I, D 共線和 $D \in BC$ 共線，因此

$$VW = \mathbf{p}_{(I)}(A) \parallel \mathbf{p}_{(I)}(D), U = \mathbf{p}_{(I)}(BC) \in \mathbf{p}_{(I)}(D)$$

故 $\mathbf{p}_{(I)}(\triangle DEF) = \triangle U'V'W'$

□

因此 I 為 $\mathbf{p}_{(I)}(\triangle DEF)$ 的九點圓圓心，注意到 $\mathbf{p}_{(I)}(X) = \mathcal{O}_I(\triangle U'V'W')$ ，因此我們只要證明 $OH \perp \mathcal{O}_I(\triangle U'V'W')$ ，注意到 $\triangle U'V'W'$ 的外切三角形會和 $\triangle ABC$ 位似，因此我們只需要證明 $\triangle U'V'W'$ 的外切三角形的歐拉線和 I 對 $\triangle U'V'W'$ 的正交截線垂直即可，而這等價於以下命題。

Claim 2. 給定三角形 $\triangle ABC$ ， N 為九點圓圓心，則 N 對 $\triangle ABC$ 的正交截線垂直 $\triangle ABC$ 的外切三角形的歐拉線。

proof of Claim 2. 注意到 $\triangle ABC$ 的外切三角形和 $\triangle ABC$ 的垂足三角形位似，因此我們只要證明 N 對 $\triangle ABC$ 的正交截線和垂足三角形的歐拉線垂直即可，考慮等軸雙曲線 $\mathcal{H} = (ABCNH)$ ，則我們有 N 在 \mathcal{H} 上的切線 $T_N(\mathcal{H})$ 會垂直 N 對 $\triangle ABC$ 的正交截線，接著我們證明 $T_N(\mathcal{H})$ 就是垂足三角形的歐拉線。注意到 N 對 $\triangle ABC$ 垂足三角形的等角共軛點就是垂足三角形的垂心 H_H ，因此 NH_H 即為垂足三角形的歐拉線，且由等共軛變換知道 $NH_H = T_N(\mathcal{H})$ ，因此得證。 □

Problem 7.3. 三角形 $\triangle ABC$ 的九點圓圓心為 N ， Ko 為 Kosnita 點，則

$$\mathcal{O}_N(\triangle ABC) \perp OKo$$

Proof. 設 $\mathcal{O}_N(\triangle ABC)$ 交 BC, CA, AB 於 N_A, N_B, N_C ， A', O_A 為 A, O 關於 BC 的對稱點，類似定義 B', O_B, C', O_C ，則顯然我們有 A, A', O, O_A 共圓且圓心為 N_A ，記此圓為 (N_A) ， (N_A) 和 (ABC) 的交點為 X ，同理定義 Y, Z ，則考慮以 A

為中心的反演變換則 X 反演後的像為 OA' 和 BC 的交點，再由 $AO_A, A'O$ 關於 BC 對稱，我們有 AN, AX 為等角共軛線，故 A, X, K_o 共線，即 K_o 在 $(N_A), (ABC)$ 的根軸上，故 O, K_o 到 $(N_A), (N_B), (N_C)$ 等幂，即 OK_o 為三圓的根軸，故 $OK_o \perp \mathcal{O}_N(\triangle ABC)$ 。 \square

Problem 7.4. 三角形 $\triangle ABC$ ，設 $\triangle DEF$ 為其切點三角形且 I, H 為 $\triangle ABC$ 的內心、垂心。

證明：三角形 $\triangle ABC$ 的費爾巴哈點 F_e 關於 $\triangle DEF$ 的正交截線為 IH 。

Problem 7.5 (TS 在幾何毒書會丟的題)。設 G, H 為三角形 $\triangle ABC$ 的重心、垂心， (P, Q) 為 $\triangle ABC$ 的一對 antigonal conjugate 且 O_P, O_Q 為 P, Q 的 orthocorrespondent，若 GH 分別與 PO_P, QO_Q 交於 U, V 證明 $(G, H; U, V) = -1$ 。

Proof. 設 C 為 $(ABCPH)$ ，過 H 做垂直 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 的直線交 C 於 X ，則

$$(X, H; P, Q)_C = -1$$

因此我們只需要證明 PO_P, QO_Q, XG 三線交在 C 上即可，注意到 A, B, C, O_P, O_Q, G 共錐線，因此考慮錐線 $\mathcal{G} = (ABCGO_P O_Q)$ ，注意到 C, \mathcal{G} 有四個交點，令 Y 為第四個交點，我們先證明 X, G, Y 共線，考慮 GX 和 C 的另一個交點 Y' ，則 Y' 的三線性極線垂直 HX ，因此有 $Y' \in \mathcal{G} \cap C$ 故 $Y = Y' \implies X, G, Y$ 共線。接著我們證明 P, O_P, Y 共線，這等價要證明 $(P, A; B, C)_C = (O_P, A; B, C)_G$

Claim 1. $(P, A; B, C)_C = (O_P, A; B, C)_G$

proof of claim 1. 設 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 交 BC, CA, AB 於 A_1, B_1, C_1 ，注意到

$$(P, A; B, C)_C = P(P, A; B, C) = (\infty_{\mathcal{O}_P(\triangle ABC)}, A_1; B_1, C_1)$$

而另一方面，設過 A 平行 $\mathcal{O}_P(\triangle ABC)$ 的直線交 BC 於 S 則

$$(O_P, A; B, C)_G = (A_1, S; B, C) = A(\infty_{\mathcal{O}_P(\triangle ABC)}, A_1; B_1, C_1) = (P, A; B, C)_C \quad \square$$

因此我們得到 P, O_P, Y 共線，由於 P, Q 對稱我們同時也得到 Q, O_Q, Y 共線。故

$$(G, H; U, V) = Y(G, H; U, V) = Y(X, H; P, Q) = -1 \quad \square$$